Zweiter Artikel.

Bemerkungen zum Unterricht in der wissenschaftlichen Geometrie

von Federigo Enriques in Bologna.

§ 1. Über die Lehrpläne und Gestaltungen der Schulen. Eine weitausgedehnte Bewegung stürmt heutzutage gegen die überlieferten Schuleinrichtungen und pädagogischen Systeme an. Die Faktoren dieser Bewegung sind auf der einen Seite in den höheren und mannigfaltigeren Forderungen des praktischen Lebens zu suchen, die eine größere Ausbreitung und Demokratisierung der Kultur mit sich bringen, auf der anderen Seite in der neueren Auffassung der Wissenschaft, welche die Stellung der Beobachtung und Erfahrung gegenüber den logischen Prozessen angemessener erkannt hat und wertet.

Die pädagogischen Forderungen, die sich hieraus ergeben, sind in wirksamer Weise von der englischen Philosophie, von Bain, ausgesprochen worden; sie stellte im Gegensatz zur klassischen Schule das Ideal einer modernen Schule auf, welche die Schüler schnell praktischen Zielen zuführt und in ihnen in höherem Maße als die Fähigkeiten der Intelligenz die der Sinne ausbildet.

Dieser Gedanke gründet sich und stützt seine Grundsätze auf den Utilitarismus; nach ihm sucht man in der Tat nach Wirtschaftlichkeit und Verwertung der vorbereitenden Arbeit, die man für den Schüler nicht verloren wissen will, nach Verwertung namentlich in den technischen Berufen, dem Bedürfnis der Mehrzahl gemäß.

Diesen neuerungssüchtigen Bestrebungen gegenüber hat die klassische Schule Widerstand geleistet, nicht sowohl indem sie sich auf die Tradition stützte, als vielmehr indem sie sich selbst umgestaltete und der Neuzeit anpaßte. Es geschah dies dadurch, daß sie den Fortschritten der philosophischen und grammatischen Kritik entsprechend den Betrieb der alten Sprachen in einem mehr wissenschaftlichen Sinne entwickelte, sich so also von der alten humanistischen Richtung

abwandte, und mehr noch dadurch, daß sie dem Betrieb der physikalischen und biologischen Wissenschaften eine immer bemerkenswertere Stellung einräumte.

Es ist nicht unsere Absicht, hier die gequälte Frage nach der Entscheidung zwischen den beiden Schuleinrichtungen, die sich im Gegensatz zu einander darbieten, zu erörtern, um so mehr als eine billige Abschätzung der Gründe, die zugunsten einer jeden sprechen, zu beweisen scheint, daß vielmehr Anlaß vorhanden ist, die beiden verschiedenen Systeme parallel neben einander zu entwickeln, den verschiedenartigen Bedürfnissen entsprechend. Diese neuerdings (wenigstens teilweise) in Frankreich und Deutschland angenommene Lösung des Problems bietet auch den Vorteil, eine umfassende und lehrreiche Erfahrung zu ermöglichen.

In dieser Hinsicht bezweifeln wir für unsern Teil nicht, daß die Ansprüche der klassischen Schule (neben denen anderer Institute vorwiegend erzieherischen Charakters), als Vorbereitung der Intelligenz zu den höheren Studien vollständig aufrecht erhalten zu werden, neu gekräftigt, Aussicht auf Erfolg haben in einem Zeitalter, in dem man noch nicht sieht, wodurch man die geistige Schulung der Grammatik ersetzen könnte. Wir sprechen insbesondere von der griechischen Grammatik, weil sich in der harmonischen Sprache, von der sie uns das Wesen enthüllt, das lichtvoll klare und tiefe Denken eines Volkes bewegt hat, das in der Vereinigung des Kultus der Wahrheit und Schönheit über jedes andere hinausragt.

Wir haben in der Tat die Überzeugung, daß es der demokratischen Bewegung der Kultur, auch wenn sie sich allmählich auf alle sozialen Schichten verbreitet, nicht gelingen wird, die Aufgabe einer ausgewählten Vorbereitung auf höhere Studien und auf gewisse erhöhte Funktionen überflüssig zu machen, deren gute Erfüllung in der bürgerlichen Gesellschaft als eine Bedingung der Dauerhaftigkeit einer wahrhaft lebensfähigen Demokratie angesehen werden kann.

§ 2. Über die verschiedenen Systeme des Unterrichts in der Geometrie. Auf dem Gebiete der Geometrie ist die reformatorische Bewegung, die von England gekommen und durch eine Reaktion gegen die Euklidischen Methoden des Unterrichts gekennzeichnet ist, insbesondere von Perry betrieben worden; nach dieser Richtung erstrebt man, die deduktive Entwicklung unserer Wissenschaft durch eine mehr praktische Art der Darstellung zu ersetzen, indem man der Laboratoriumsarbeit eine größere Ausdehnung gibt. Dies praktische System erscheint später als nach einer Richtung des

empirischen Unterrichts abgeändert, bekannt unter dem Namen des methodischen Unterrichts.

Die reformatorische Tendenz, die, wie bekannt, in den deutschen Schulen Verbreitung besitzt, ist (wenigstens bis jetzt) noch nicht in unser Land gedrungen; in diesem ist die Entwicklung der Methoden, insbesondere in den mittleren Schulen höheren Grades, bis zu diesen letzten Zeiten im entgegengesetzten Sinne vor sich gegangen. So haben, seitdem Betti und Brioschi den Euklid in unserer klassischen Schule wieder zu Ansehen gebracht haben, berühmte Geometer und tüchtige Lehrer[1]) sich Mühe gegeben, eine Behandlung der Elementargeometrie zu geben, in der man sich vor allem einer logisch strengen Gestaltung zu nähern suchte.

Was werden wir nun zu dem Streit zwischen diesen pädagogischen Systemen, die einander feindlich gegenüberstehen, sagen? Für ein objektives Urteil verfolgen die beiden Richtungen, die logisch entwickelnde und die empirische, im Unterricht der Geometrie zwei verschiedene Ziele. Nach dem einen, das dem Geist der klassischen Schule angepaßt ist, will die Geometrie die geistigen Kräfte ausbilden und schärfen; nach dem andern will sie Tatsachen lehren und das Wissen der Mehrzahl zugänglich und praktisch verwertbar machen, in Anpassung an die Richtung der technischen Schule.

Zwischen diesen beiden Zielen zu wählen, kommt der Wissenschaft nicht zu, da die Entscheidung in letzter Analyse einem Werturteil in bezug auf mannigfaltige Interessen vorbehalten bleibt.

Es kommt aber wohl der pädagogischen Wissenschaft zu, in bezug auf jedes dieser Ziele die geeignetsten Mittel zu erforschen, um den Inhalt der vorliegenden Systeme zu beleuchten, indem man die Menge der Resultate abmißt, die man sich von ihnen versprechen darf, und besser noch, ob und wie es möglich und angemessen ist, sie zu einem Gesamtplan der Studien zu vereinigen.

Unsere Ansicht ist die folgende:

Wenn wir von den mehr eigentlich technischen Zwecken absehen, welche die Richtung Perrys verfolgt, so stellt sich das experimentelle und methodische Lehrverfahren in der Geometrie, in geeigneter Weise entwickelt, auch von dem Gesichtspunkte der geistigen Ausbildung aus als das passendste für die erste Stufe des Studiums dar

---

1) Sannio und d'Ovidio, De Paolis, Fajfofer, Veronese, Ingrami. Insbesondere bieten die „Elemente“ von Veronese einen durchaus selbständigen Aufbau des geometrischen Systems, im Anschluß an die kritischen Untersuchungen desselben Verfassers, von denen hauptsächlich im vorhergehenden Artikel die Rede war.

und als den Bedürfnissen der Mehrzahl derjenigen Schüler angemessen, welche die mehr elementaren Schulen besuchen.

Auf einer folgenden Stufe und insbesondere in den Schulen, die eine Vorbereitung zu höheren Studien zur Aufgabe haben, findet die logische Entwicklung des Stoffes ihren Platz, da diese geeignet ist, die logischen Fähigkeiten des Schülers auszubilden und in ihm die Anschauung selbst klarer und bewußter zu gestalten, um so mehr, als in einem zu frühen Alter die Fähigkeit zur Abstraktion sich nicht angemessen entwickeln könnte. Aber auch in die wissenschaftliche Richtung kann man vorteilhaft einige Grundgedanken aufnehmen, die sich mit den Ideen der englischen Pädagogen berühren, und kann einen natürlichen Übergang von dem einen der beiden Grade des Unterrichts zum andern herstellen.

§ 3. Die experimentelle Methode. Die pädagogische Methode von Perry ist direkt entwickelt worden, um die Schüler „zum Arbeiten anzuleiten“; sie stellt sich also als eine praktische Vorbereitung für die Gewerbe dar.

Von diesem Gesichtspunkte aus nimmt die Handhabung der Instrumente die erste Stelle ein; dagegen wird die Bedeutung der Definitionen und der Beweise beschränkt oder ganz unterdrückt, wobei diese letzten oft durch reine Bestätigungen, die aus irgend einem besonderen Fall hervorgehen, ersetzt werden.

Wählen wir zwei charakteristische Beispiele:

An Stelle einer Erörterung der Kennzeichen, die es gestatten, die Gleichheit von Flächen zu definieren, lehrt man ohne weiteres die praktische Art, (annähernd) eine Fläche mit quadriertem Papier oder mit dem Instrument von Rankine zu messen; der Schüler lernt so das praktische Verfahren der Flächenausmessung, ohne sich damit aufzuhalten, den Begriff tiefer zu erfassen.

An Stelle eines Beweises des Pythagoreischen Lehrsatzes bietet man vor allem zuerst dem Schüler das einfache Beispiel, in dem die Seiten des rechtwinkligen Dreiecks die Werte 3, 4, 5 haben, und dann eine Figur für den allgemeinen Fall, aus der man (nötigenfalls vermittels Zerschneidens des Papiers) die physikalische Gewißheit des Satzes entnimmt.

Nun, wie wir angedeutet haben, hat die praktische Methode Perrys bald eine Abänderung im Sinne der Ausbildung des Geistes erfahren. Von diesem Gesichtspunkte aus wird dieselbe Laboratoriumsübung nicht als Mittel angesehen, um direkt Nützliches zu erreichen, sondern als Mittel zur Entwicklung des Auffassungsvermögens, die

sich mit der Übung verbindet, und das Experiment wird dabei ein Mittel, die geometrischen Ideen zu klären und zu vertiefen. Ein bedeutender dänischer Pädagoge, T. Bonnesen, scheint auf diesem Wege in sehr guter Weise vorangeschritten zu sein.

Es ist unserer Ansicht nach wichtig, den Charakter der experimentellen Methode von denen der anschaulichen und halbwissenschaftlichen Behandlungsweisen, die auch in mannigfachen Schulen angenommen sind, zu unterscheiden.

Die Überlegenheit der experimentellen Methode ergibt sich somit für uns nicht nur aus der praktischen Übung in der Handhabung der Instrumente, sondern auch aus zwei Arten von Vorteilen, positiven und negativen, hinsichtlich der intellektuellen Ausbildung.

Die ausgedehnte Verwendung wirklicher geometrischer Erfahrungen ist tatsächlich für die Entwicklung der Anschauung des Schülers von viel größerem Werte als Beschreibungen und Worterklärungen, auch weil sich mit diesen Erfahrungen ein praktisches Interesse verknüpft, das die Aufmerksamkeit wach erhält.

Andererseits glauben wir, ohne weiteren Schaden in der anschaulichen Behandlung die nur scheinbar logischen Entwicklungen, die rein illusorischen Definitionen und Beweise, aufgeben zu können, da diese nicht nur ermüden und langweilen, sondern auch Verwirrung in den Ideen verursachen, indem sie leere Vereinigungen von Worten als Schlußfolgerungen durchgehen lassen.

§ 4. Die wissenschaftliche deduktive Methode von Euklid. Nach unseren Ansichten findet die experimentelle Methode fast ausschließlich in einem ersten Lehrgange der Geometrie ihre Stelle; auf einer höheren Stufe wird sie nützlich das wissenschaftliche Studium begleiten, sei es zur Ausbildung der Intelligenz im allgemeinen, sei es zur spezifischen Vorbereitung auf wissenschaftliche Studien, insbesondere auf physikalisch-mathematische, denen, wie wir behaupten, dies Studium auf direkten und indirekten Wegen zu Hilfe kommen muß.

Aber die Erreichung dieser Ziele steht im Zusammenhang mit der Art, wie man die Wissenschaftlichkeit dieser Methode auffaßt, und mit den Wahrnehmungen, durch die es gelingen kann, die Darlegungen in weiterem Maße zugänglich zu machen.

Um über diesen Punkt eine Ansicht zu gewinnen, betrachten wir vor allem die Art der Darstellung der Geometrie, wie sie uns von Euklid geboten wird.

Diese Behandlungsweise ist genau wie ein logisches Modell gehalten, ihre Überlegenheit springt dem leicht in die Augen, der sie

in Vergleich mit anderen, mehr modernen Behandlungsweisen, z. B. mit der von Legendre, einer Prüfung unterzieht.

Die Genauigkeit der Sätze, die Schärfe und die Vollständigkeit der Beweise, in denen sorgfältig alle möglichen Fälle der Figur untersucht werden, die bewundernswürdige Ordnung, gemäß der die Lehrsätze in einer logischen Verkettung aufeinanderfolgen, machen die hervorstechendsten Vorzüge der Euklidischen Behandlungsweise aus. Zur logischen Vollkommenheit dieser Ordnung fehlt nur ein Verzeichnis der im Text vorkommenden grundlegenden Begriffe und Sätze; die ersten Definitionen, die allgemeinen Ideen (Grundsätze) und die Forderungssätze, die den elementaren Konstruktionen zugrunde gelegt werden, sind vom modernen Gesichtspunkte unter jeder Kritik, wenn auch zu beachten ist, daß diese Grundlagen für die Griechen nicht die Aufgabe hatten, die man ihnen heute würde zuerteilen wollen, und um so mehr, als sie wahrscheinlich (wenigstens zu ihrem größeren Teile) einen späteren Zusatz zu dem ursprünglichen Texte darstellen.

Aber um den Text selbst unter dem didaktischen Gesichtspunkt zu werten, ist es angebracht, ihn rücksichtlich der Bildung der geometrischen Ideen zu betrachten.

Von diesem Gesichtspunkte aus bemerkt man, daß die Euklidische Darstellung fertige Begriffe, deren Entstehung ersichtlicher Weise sich aus einem langen induktiven Prozesse ergeben hat, in der letzten, vollendetsten und abstraktesten Phase ihrer Erarbeitung darstellt. Dies gilt auch für die Ausdrucksweise der Lehrsätze und für ihre Beweise. Dieselbe so häufig wiederkehrende Form des indirekten Beweises, der Euklid als Kunstgriff vorgeworfen wird (der uns um so mehr widerstrebt, wo er dazu führt, die Figur im Gegensatz zu dem anschaulich Möglichen umzugestalten), rechtfertigt sich in seinem System dem Kriterium gemäß, die Elemente der Beweisführung auf ein Minimum zu reduzieren, indem sie erkennen läßt, daß die Behauptung in den Sätzen, deren Beweis geliefert ist, schon indirekt enthalten ist.

Unsere Kritik fassen wir in folgendes Urteil zusammen:

Die Euklidische Behandlungsweise verhüllt, indem sie lange Zeit auseinanderliegende Ergebnisse nach ihren Beziehungen nebeneinander stellt und in einem deduktiven System darbietet, unter der dogmatischen Gestalt den Weg zu ihrer Entdeckung.

Dies wird in der Tat besonders ersichtlich in der Behandlung der höheren Theorien, z. B. in der Lehre von der Gleichheit im Buch II, und vor allem in der Lehre von den Proportionen des Buches V.

Die Schwierigkeit und die übermäßige Länge dieser Entwicklungen bei Euklid hat in Wahrheit ihre Berechtigung. Für die Griechen hatten diese Lehren in der Tat eine Aufgabe, die weit über die reinen Zwecke der Geometrie hinausging, eine Aufgabe, die heute einem viel handlicheren Instrument, wie es der algebraische Formalismus ist, obliegt.

Es bleibt trotzdem die allgemeine Definition der „Proportion“ zwischen Größen, die an den Anfang des Buches V gestellt ist, unter dem Gesichtspunkt der Methode charakteristisch. In Wahrheit verpflichteten die Gründe, aus denen es Euklid für praktisch zweckmäßig halten mußte, die abstrakte Lehre von den Proportionen zwischen Größen vorauszuschicken und von den konkreten Anwendungen des Buches VI zu trennen, ihn nicht, sich vom Anfang der Behandlung an auf einen Standpunkt zu stellen, der die beiden Fälle des Verhältnisses, des kommensurabelen und des inkommensurabelen, zusammenumfaßt. Hier bietet sich uns also ein Kennzeichen des Euklidischen Systems dar, das seinen deduktiven Charakter in einer in die Augen fallenden Weise klarlegt. Und wir begegnen dabei gerade den offenbarsten pädagogischen Mängeln. Jedermann weiß in der Tat, daß der Begriff der Proportion den Schülern, wenn er ihnen in dieser Weise dargeboten wird, Schwierigkeiten macht, wenn man sie den Begriff sich nicht allmählich erwerben läßt, indem man zuerst den einfacheren und näher liegenden Begriff des kommensurabelen Verhältnisses behandelt und erkennen läßt, wie dieser Begriff sich für den Fall inkommensurabeler Größen verallgemeinert.

§ 5. Allgemeine Betrachtungen über die Aufgabe der Deduktion und der Induktion in der Wissenschaft. Bevor wir von diesen Bemerkungen über Euklid zu einer weitergehenden Erörterung der Methoden des Unterrichts in der Geometrie kommen, wollen wir einen Moment einen allgemeinen Blick auf den Prozeß des Aufbaus der Wissenschaft werfen, um ein Urteil darüber zu gewinnen, welche Aufgabe in ihr der Deduktion und der Induktion zukommt.

Ebenso wie man gemäß der positiven Entwicklung der erkenntnistheoretischen Ideen nicht eine glatte Unterscheidung zwischen experimentellen und Vernunftwissenschaften annehmen kann, so kann man diese auch nicht zwischen induktiven und deduktiven Wissenschaften annehmen. Jede Ordnung von Kenntnissen stützt sich in ihren Anfängen und in ihren Schlüssen auf Beobachtung und auf Erfahrung, deren Daten (soweit es möglich ist) zu einer logisch fortschreitenden Darstellung zusammengestellt werden; jede logisch fort-

schreitende Darstellung steigt indirekt von vorläufigen Beobachtungen und Erfahrungen auf zur Darstellung dieser in Begriffen, die Hypothesen einschließen, und steigt von diesen deduktiv zu neuen Tatsachen herab, die in das Gebiet der bestätigenden Erfahrung fallen, von der sie ihrerseits wieder einen Anreiz zur Bildung von allgemeineren und abstrakteren Begriffen erhält, ohne endgültig bei der einen oder anderen Phase ihrer abwechselnden und fortschreitenden Bewegung Halt zu machen.

Aber von diesem Schema des Verfahrens beim Aufbau der Wissenschaft, dessen Richtigkeit beim Vergleich verschiedener Wissenschaften offenbar wird, scheint zuweilen eine einzelne Wissenschaft abzuweichen, wenn man sie getrennt von den anderen betrachtet; denn die neue induktive Entwicklung, die von den Schlußfolgerungen einer wissenschaftlichen Theorie und von den sie bestätigenden Erfahrungen ihren Ausgangspunkt nimmt, veranlaßt uns oft, die herkömmlichen Grenzen von jener, die man als selbständige Wissenschaft ansieht, zu überschreiten, um auf mehrere Arten und unter verschiedenen Gesichtspunkten den Inbegriff des Tatsächlichen, das ihr angehört, weiter auszudehnen.

Das kann man z. B. von der Geometrie sagen, und zwar unter zweifachem Gesichtspunkte. Während irgend eine geometrische Theorie in sicherer Weise in einem rein deduktiven System begründet erscheint, zeigt uns die Geschichte, daß man eine allmähliche Erweiterung der Theorie erhält vermittels Beobachtungen und Erfahrungen, die zur Verallgemeinerung der grundlegenden Begriffe beitragen. So sind die Auffindung mehrfach zusammenhängender Flächen oder die von Polygonen, die den automorphen Funktionen entsprechen, als die Ausgangspunkte für die Entwicklung einiger unter den am meisten vorgeschrittenen Zweigen unserer Wissenschaft anzusehen.

Aber außerdem kann die ganze Geometrie von der Statik und von der Dynamik, die ihre naturgemäße Fortsetzung bilden, nur durch Abstraktion getrennt werden.

Es ist hier nicht der Ort, eine derartige philosophische Erörterung lang auszuspinnen. Was wir darüber gesagt haben, war indes unentbehrlich, um einen allgemeinen Überblick über die Methoden zu gewinnen, die zum Studium der Geometrie erforderlich sind.

Wir werden uns gegenwärtig halten, daß diese Methoden nicht auf die Beleuchtung eines geschlossenen Gebiets von Erkenntnissen abzielen dürfen, sondern darauf, den Weg zu bahnen zu einer Erfassung von weitergehenden Entwicklungen, die aus ihrer fortschreitenden Erweiterung hervorgehen.

§ 6. Logisch folgernde (rationale) induktive Methode. Die Intelligenzen auf höhere wissenschaftliche Studien vorbereiten, heißt diejenigen Fähigkeiten, die zur Durchdringung der sinnlichen Wahrnehmung geschickter machen, völlig ausbilden, heißt auch im voraus die Einsicht in den Vorgang geben, nach dem die Kenntnisse sich entwickeln. Und dies Ziel zeigt in seinen allgemeinen Linien den im Unterricht zu befolgenden Weg, der idealer Weise eine Wiederholung der historischen Entwicklungen sein würde, der Anwendung des bekannten biogenetischen Gesetzes gemäß, daß die Entwicklung des Einzelwesens eine Wiederholung der Stammesentwicklung ist.

Es ist indes notwendig, diesen idealen Gesichtspunkt mit der ökonomischen Forderung in Einklang zu bringen, die uns verbietet, alle die teilweisen und oft irrigen Entwicklungen zur Darstellung zu bringen, die einer ausgebildeten Theorie vorausgehen, indem man es als zweckmäßig ansieht, in dem Schüler die Kenntnis ihrer Entwicklung nur so weit entstehen zu lassen, als sie zum Verständnis des gegenwärtigen Zustandes notwendig ist.

Kommen wir von der abstrakten Allgemeinheit zur konkreten Betrachtung der geometrischen Materie. Der rein deduktiven logisch folgernden Behandlung Euklids ziehen wir einen logisch folgernden Unterricht vor, der nicht den induktiven Charakter der Theorien vernachlässigt. Das System, das wir vorschlagen, stellt sich nicht in Gegensatz zu dem Euklidischen, sondern bildet vielmehr dessen Vervollständigung.

Was soll nun, die Geometrie induktiv entwickeln, besagen, und wie kann man diese Entwicklung mit den Forderungen eines logisch folgernden Unterrichts vereinigen?

Auf der ersten Stufe des Unterrichts haben wir experimentelle Lektionen vorausgesetzt. In diesen arbeitet man mit der Figur und mit Instrument, indem man die verschiedensten Beobachtungen des Tatsächlichen, das sich auf sie bezieht, gruppiert.

Diese selben Beobachtungen und vom Schüler schon erworbenen Anschauungen, vor allem die elementarsten von ihnen, bilden den Ausgangspunkt des logisch folgernden Unterrichts. Es wird indes nötig sein, sie in einer allgemeinen logischen Form als Postulate auszudrücken und deshalb jede getrennt von den anderen zu nehmen und sie den gegenseitigen Abhängigkeitsverhältnissen gemäß wieder miteinander in Verbindung zu setzen.

Nun kann man von Anfang an alle Postulate aussprechen und die Begriffe in der größten Allgemeinheit aufstellen, um dann aus

ihnen die Folgerungen zu ziehen. Im Gegensatz dazu kann man hinwiederum mit jedem Postulat und mit jeder von der Wirklichkeit unmittelbar dargebotenen Definition die Eigenschaften, die von ihnen abhängen, in Verbindung setzen und Schritt für Schritt zeigen, wie die Beobachtung der Figuren bei der weiteren Entwicklung neue Daten und Begriffe an die Hand gibt, aus denen umfassendere Entwicklungen folgen.

Diese letzte Art, die Materie anzuordnen, prägt den Geistern schon eine klarere Einsicht in die Bildung der geometrischen Ideen ein. Sie führt zu Beweisen und Definitionen, die man wohl induktiv nennen kann.

So z. B. wird man, anstatt zuerst die Begriffe Linie und Fläche darzubieten und für diese die allgemeinsten Postulate aufzusuchen, um dann zur besonderen Betrachtung der Geraden, der Strecken, der Kreise, der Bogen, der Ebenen, der Kugeln usw. zu kommen, statt dessen mit der Analyse der Eigenschaften beginnen, die sich auf diese besonderen Figuren beziehen, wobei man jedoch die Eigenschaften, die der Strecke und dem Bogen in beliebigen begrenzten offenen Linien gemeinsam sind, nebeneinander stellt usw. (Vgl. Art. 3).

In ähnlicher Weise wird man fortschreitend den Begriff der von einem Umriß begrenzten ebenen Fläche vermittels der Betrachtung von Dreiecken, von konvexen Vielecken und hierauf von konkaven Vielecken mit geradlinigen Strecken und mit Kreisbogen entstehen lassen, indem man beobachtet, wie man diese Flächen durch Vereinigung und gegenseitige Durchdringung von Teilen der Ebene in bezug auf Geraden und Kreise bestimmen kann (Art. 3).

Es ist zweckmäßig hervorzuheben, daß nach dieser Richtung die induktive und genetische Methode bei dem gegenwärtigen Stande der Wissenschaft sich wie eine logische Notwendigkeit darstellt, da ein System von Postulaten, das ausreichte, die Linien und die Flächen in ihrer ganzen Allgemeinheit zu definieren, noch nicht erschöpfend diskutiert ist.

In derselben Art des Fortschreitens wird man für diese Figuren die Begriffe der Kongruenz (Art. 4) und der Äquivalenz usw. und die Eigenschaften, die mit ihnen im Zusammenhang stehen, beleuchten können. Und es ist nicht als Übelstand zu fürchten, wenn diese Begriffe so vermittels von Definitionen eingeführt werden, die man nach und nach erweitern und zuweilen abändern muß, um so auf allgemeinere überzugehen, wenn nur die Erweiterung und die Abänderung (wo es nötig ist) in natürlicherer Weise gerechtfertigt, auch, wenn Gelegenheit ist, durch beigefügte Bemerkungen vorbereitet wird.



So kann z. B. der Übergang von der Lehre der Äquivalenz [Gleichheit] (die vermittels der Zerlegung in kongruente vieleckige Teile definiert ist) zu der von allgemeineren Flächen vorbereitet werden, indem man bemerken läßt, wie andere Kennzeichen der Äquivalenz, die unserer anschaulichen Idee von der Flächengröße konform sind, immer auf die engere Definition zurückgeführt werden können, wie nämlich als zerlegbar in kongruente vieleckige Teile sich ergeben die Vielecke,

1. die in kongruente Teile, die nicht Vielecke sind, zerlegbar sind,
2. oder solche, daß das eine von ihnen nicht größer (überragend) ist als das andere usw. (Vgl. Art. 6).

Parallel mit der induktiven Auseinandersetzung der Definitionen muß die Entwicklung der Beweise gehen. So z. B. ist es zweckmäßig, da die Sätze über Proportionen sich sehr einfach für den Fall des kommensurabelen Verhältnisses aufstellen lassen, im System mit diesen zu beginnen; außerdem kann man die Vervollständigung des Beweises im Falle der Inkommensurabilität auf irgend ein Beispiel beschränken, um nicht im Schüler Überdruß hervorzurufen.

Es ist ein Irrtum zu glauben, daß die Wissenschaftlichkeit des Unterrichts immer auf der Vollständigkeit der Beweise oder der vollkommenen Allgemeinheit der Definitionen beruht; es genügt, daß die Bedeutung und das ideale Erfordernis dieser Vollständigkeit und Vollkommenheit von dem Lernenden begriffen wird, und für diesen Zweck ist oft irgend ein absichtlicher und klar dargelegter Mangel viel mehr wert als eine pedantische Genauigkeit.

§ 7. Mittel, über die der Lehrer verfügt. In bezug auf die Vollendung eines wissenschaftlichen Unterrichts wie auch in bezug auf die praktische Verwirklichung des induktiven Programms sind die unterrichtlichen Hilfsmittel näher zu betrachten, über die der Lehrer in der Schule verfügt und deren er sich in verschiedener Weise bedienen kann.

Diese Hilfsmittel sind: 1. das Lehrbuch, das man den Schülern in die Hände gibt, 2. die mündliche Unterweisung, 3. die schriftlichen Übungen, die den Schülern in der Schule oder zu Hause aufgetragen werden.

Wenn auch diese drei Hilfsmittel nebeneinander gestellt und zu einem Zweck in Übereinstimmung gebracht werden müssen, so kommt ihnen für diesen doch nicht Identität in ihrer Aufgabe zu. Insbesondere würde man es z. B. nicht verstehen können, wenn das Lehrbuch einfach die mündliche Unterweisung wiederholte oder umgekehrt.

Die dem Worte eigentümliche Beweglichkeit bestimmt es am besten dazu, es zum Dolmetsch des ·Prozesses beim Erwerb des Wissens zu machen, das ein Buch notwendigerweise in einer festeren und fertigeren Form bieten muß.

Diesen Kriterien haben wir in den Grenzen der Anforderungen, die durch die Lehrpläne für unsere Schulen aufgestellt sind, zu genügen gesucht, als wir zusammen mit U. Amaldi unsere „*Elementi di Geometria ad uso delle scuole secondarie superiori*“ 3. Aufl., Bologna, Zanichelli, 1908, verfaßten.

Wenn es sich z. B. um die Kongruenzbeziehung zwischen zwei Dreiecken, die gleiche Seiten haben, oder auch um die Ungleichheit zwischen den Seiten eines Dreiecks handelt, so wird der Lehrer diese Ergebnisse in natürlicher Weise aus einer Beobachtung über die Art, das Dreieck mit dem Zirkel zu konstruieren, hervorgehen lassen können, auch wenn die genannte Konstruktion systematisch erst später behandelt wird.

Wir stehen auf dem Standpunkte, daß, während es angemessen ist, in der mündlichen Unterweisung die induktive Behandlung breiter auszuführen, es dagegen vorteilhaft ist, wenn das Lehrbuch die deduktiven Entwicklungen ausführlicher und vollständiger verfolgt. Die Abschnitte des Buches, die vom Lehrer als zu schwierig oder als weniger interessant für die Gesamtheit der Schüler übergangen werden, besitzen immer noch einen Zweck für die Minderheiten, denen man die Mittel darbieten muß, ihre Ausbildung zu vertiefen; sie werden andererseits allen nützlich sein als ein Hinweis auf einen Mangel, der noch zu beseitigen bleibt.

Dasselbe ist insbesondere von irgend welcher genaueren Erklärung eines Begriffs zu sagen, die in der Absicht gegeben wird, die logischen Beziehungen strenger zu begründen; so z. B. von den Beobachtungen, die dazu führen, die Fläche eines konkaven Vielecks allgemein zu definieren, einen Begriff, der anschaulich jedem vertraut ist.

Was die den Schülern als notwendige Ergänzung des Kathederunterrichts vorgelegten Übungen betrifft, so kann man in ihnen vor allem zum Auffinden anleiten und daneben die anziehenden praktischen Anwendungen pflegen, indem man so die ersten Studien der experimentellen Geometrie näher fortführt. Aber wenn man, wenigstens nebenbei, die Schüler auch an eine verstandesmäßige Erörterung der erhaltenen Lösungen gewöhnen will, so wird es nötig sein, hauptsächlich auf die Reihenfolge der angegebenen Fragen Sorgfalt zu verwenden, indem man sie in der Weise anordnet, daß sie ihrer logischen Abhängigkeit gemäß in einer induktiven Reihe aufeinander folgen

und ihren induktiven Beziehungen gemäß in einer induktiv fortschreitenden Reihe.

§ 8. Über das Maß der Strenge und gewisse kritische Übertreibungen. Unsere pädagogischen Kriterien müssen noch in bezug auf das, was die Strenge der wissenschaftlichen Methode angeht, beleuchtet werden. Indem wir auf einige Beispiele hinwiesen, haben wir schon implizite auf die Wichtigkeit den Blick gelenkt, die wir der logischen Analyse zugestehen, und auf die Höhe, auf die sie zu stellen wir für angebracht halten. Dem gegenüber aber haben die Bemerkungen über die vollkommene Vollständigkeit der Beweise schon offenbart, wie unser Begriff von Strenge sich etwas von der herkömmlichen Ansicht entfernt.

Unsere Art, die Dinge zu betrachten, läßt sich verstehen und rechtfertigen in Rücksicht auf den erzieherischen Zweck des Unterrichts, der darauf gerichtet ist, die erkenntnistheoretische Seite der Wissenschaft klar zu stellen.

Und in der Tat unter diesem Gesichtspunkte hat die genaue Unterscheidung zwischen empirischer Beobachtung oder Anschauung auf der einen Seite und der Logik auf der andern Seite die größte Wichtigkeit.

Der kritische Fortschritt in der modernen Behandlung der Grundlagen der Geometrie besteht gerade hierin; er ist das Ergebnis einer bewußten Entwicklung der Forschungs- und Beweismittel, die im allgemeinen die neuen Anschauungen in bezug auf die wissenschaftliche Methode beherrscht, deren Wert für den Fortschritt unserer theoretischen Kenntnisse, insbesondere im Gebiet der Physik, man nicht würde verkennen können.

In Hinsicht gerade auf diese weiteren Entwicklungen und auf die geistige Vorbereitung, die sie erfordern, rechtfertigt sich das Kriterium einer strengen Wissenschaftlichkeit, die niemals zuläßt, stillschweigend neue Daten der Anschauung in die Gedankenentwicklungen einzuführen, die nicht ausdrücklich als solche in die Prämissen aufgenommen sind.

Nur in dieser Weise wird es gelingen, die Natur eines logischen Organismus zum Verständnis zu bringen, auch wenn man es nicht immer angebracht findet, die Entwicklung bis in ihre kleinsten Teile zu verfolgen.

Formulieren wir ausdrücklich die Bedingung von Strenge, die wir als eine Forderung des wissenschaftlichen Unterrichts in der Geometrie in Vorschlag bringen: Angeben, welche grundlegenden Be-

griffe als ursprüngliche ohne Definition angenommen werden, indem man sie als vermittels ihres Erfahrungsgehalts erklärt ansieht; aussprechen in der Form von logischen Verhältnissen als Postulate die Beziehungen zwischen diesen Begriffen, die uns die Beobachtung und die Erfahrung an die Hand geben, indem man den Gebrauch, den man von ihnen in den Beweisen machen muß, darlegt; definieren hernach (gemäß den Kriterien der logischen Definition) jeden anderen Begriff, den man in die Entwicklung einführt, und beweisen (oder wenigstens die Notwendigkeit des Beweises hervorheben) jeden Satz, der sich nicht unter den Postulaten ausgesprochen findet.

Wir erheben übrigens in keiner Weise die Forderung, das Appellieren an die Anschauung zu beschränken, vielmehr weisen wir nur als antididaktisch die Forderung zurück, nur unabhängige grundlegende Begriffe und Sätze einzuführen.

Und wir weisen darauf hin, daß allein aus dieser Forderung wahrhaft unüberwindliche Schwierigkeiten für eine der Schule angepaßte wissenschaftliche Darstellung der Geometrie hervorgehen. Wer weiß nicht, wieviel umständliche und spitzfindige Unterscheidungen, wieviel Kunstgriffe zuweilen nötig sind, um die Anschauung zu vermeiden und aus einer geringen Zahl von Prinzipien neue Eigenschaften abzuleiten, die nicht weniger evident sind.

Die Lehrer sind, sobald sie aus der Praxis der Schule gelernt haben, hiervon sicher überzeugt; sie ergeben sich demgemäß darein, einen Anspruch aufzugeben, dessen starre Anwendung ihnen undurchführbar erscheint; aber man ergibt sich oft widerwillig darein wie in ein Gebrechen ohne Heilmittel. Hierin haben sie in unseren Augen unrecht, und es wird der Versuch, dies zu beweisen, nicht verloren sein. Die Bemühung, die Bestätigung von anschaulich evidenten Eigenschaften auf eine deduktive Schlußfolgerung zu stützen, ist ein Überbleibsel der unbewußten Illusion, daß die wahre Grundlage der geometrischen Sicherheit eine verstandesmäßige, nicht eine empirische Grundlage sei. Nachdem einmal erkannt ist, daß die Postulate uns unmittelbar aus der Anschauung, die für uns die Daten einer ausgedehnten Beobachtung und Erfahrung darstellt, enthüllt werden, wird es widersinnig, zu behaupten, daß die Sätze, die vermittels dieser Postulate abgeleitet werden, einen höheren Grad von Sicherheit besitzen. Und doch schleicht sich diese erkenntnistheoretische Ansicht in den Geist des Schülers ein gleichsam als Rechtfertigung für die Arbeit, zu der man ihn nötigt, wenn er beweisen soll, was er schon sieht. Die logische Folge einer solchen Methode würde eine Diskreditierung der Anschauung sein, auf der sich doch das ganze Ge-

bäude der Deduktionen gründet, wenn nicht der rechtzeitig widerstrebende Geist des Schülers auf eigene Rechnung dazu gelangt, lieber an dem Wert der Beweisführung zu zweifeln.

Noch schlechter aber ist es, wenn man sagt: „Das Postulat ist eine nicht beweisbare Wahrheit, die für die Anschauung oder für das Experiment als Grundlage genommen wird.“ Auch abgesehen von dem Umstande, daß man auf dem didaktischen Gebiete nicht in irgend einer Weise eine Rechtfertigung dieser Unbeweisbarkeit würde beibringen können, führt die vorgenannte Behauptung den Nachteil mit sich, einen Glauben an eine verschiedene Natur des Postulats und des Lehrsatzes hervorzurufen, wie wenn der Unterschied in dem eigentlichen Charakter des Lehrsatzes an und für sich läge (unabhängig von dem Verhältnis zu anderen Prämissen, deren Auswahl und Anordnung von unserem Willen abhängen), mehr als in einem Charakter der Art, die uns für seine Rechtfertigung anzunehmen passender erscheint.

Gerade um diese Unterscheidung zu beleuchten, raten wir, wo sich dazu Gelegenheit bietet, an einfachen Beispielen zu zeigen, wie ein und derselbe Satz zuweilen vermittels der Beobachtung oder vermittels einer einfachen Schlußfolgerung gerechtfertigt werden kann. So leitet man das zweite Kriterium für die Gleichheit (Kongruenz) der Dreiecke (wenn eine Seite und die beiden anliegenden Winkel gleich sind) sofort indirekt aus dem ersten (wo zwei Seiten und der eingeschlossene Winkel gleich sind) ab oder man rechtfertigt es in analoger Weise durch ein Gedankenexperiment des Aufeinanderlegens.

Mit den vorangehenden pädagogischen Bemerkungen vereinigt sich eine andere in bezug auf gewisse kritische Forderungen, die in neuerer Zeit für die Definitionen aufgestellt worden sind. Von einigen Seiten verlangt man, daß die Definition niemals überbestimmt sein soll, d. h. daß sie niemals irgend einen Teil einschließt, der eine Folge der übrigen ist. Wenn man z. B. sagt: „Ein Rechteck ist ein Parallelogramm, das vier rechte Winkel hat“, oder „das Quadrat ist ein Rechteck, das vier gleiche Seiten hat“, so gibt man überbestimmte Definitionen; man müßte also sagen: „Das Rechteck ist ein Parallelogramm, das (mindestens) einen rechten Winkel hat“, und „Das Quadrat ist ein Rechteck, das zwei gleiche anstoßende Seiten hat!“

Nun sieht jeder, wie diese Art des Vorgehens (die durch eine zu spitzfindige und formale Beachtung der Logik veranlaßt ist) Gefahr läuft, einen viel schwereren Irrtum hervorzubringen als den, gegen den man die Schüler in Schutz nehmen will. In der Tat muß die Definition einer Figur in der Anschauung genau wieder die grund-

legenden Vorstellungen wecken, denen gemäß sie sich wie eine gesehene Sache darstellt, und insbesondere muß sie deshalb in symmetrischer Weise behandeln, was in ihr Symmetrisches ist.

Übrigens kann die logische Forderung, welche die vorgeschlagene Ausschließung der überbestimmten Definitionen verlangt, in anderer Weise befriedigt werden. Es genügt, daß man jedesmal, wenn man eine überbestimmte Definition gibt, die Beziehungen der Abhängigkeit zwischen ihren verschiedenen Teilen angeben läßt.

Hiernach nehmen wir die auf die Postulate bezügliche Erörterung wieder auf.

§ 9. Ausdehnung des Unterrichts im philosophischen Sinne. Um unser pädagogisches Kriterium eines Postulats, das zuviel enthält, zu beleuchten, haben wir uns auf einen höheren Gesichtspunkt berufen, auf den der erkenntnistheoretischen Kritik. Von diesem Gesichtspunkte aus erscheint es angemessen, die Aufgaben der verschiedenen Mittel der Forschung für die Beweisführung, die als Grundlage des wissenschaftlichen Aufbaus dienen, wo es nötig ist, festzustellen. Und in dem wissenschaftlichen Unterricht der Geometrie (an dem die Logik schon einen so großen Anteil hat) sind Gelegenheiten, die Aufgabe der empirischen Hilfsmittel klar zu stellen, erstrebenswert; deshalb ist es z. B. lehrreich zu zeigen, wie eine einfache Beobachtung (Postulat von De Zolt) dazu führt, die Sätze von der Äquivalenz (Gleichheit) der Vielecke abzuändern, wenn auch ein mühsameres Schlußverfahren gestatten würde, in diesem Punkte jedes Zurückgreifen auf die Anschauung zu vermeiden (vgl. Art. 6).

Aber von dem Augenblicke an, in dem man an eine höhere philosophische Einsicht appelliert hat, wird man uns den Einwurf machen: Also verkennt ihr den Wert der neueren kritischen Untersuchungen in bezug auf die Unabhängigkeit der Postulate? Oder wie beansprucht ihr, daß ein System des Unterrichts, das diese Richtung des wissenschaftlichen Fortschritts verdeckt, eine Vorbereitung auf höhere Studien sei?

Auf einen derartigen Einwurf ist die Antwort leicht. Der Wert der genannten kritischen Untersuchungen besteht nicht so sehr darin, Beziehungen der Abhängigkeit festzustellen, als darin, zu erkennen, daß gewisse Daten der Wirklichkeit von anderen schon angenommenen unabhängig sind; ihr wahres Ergebnis für die Geometrie und im allgemeinen für die physikalischen Wissenschaften ist in der Tat die

Erweiterung der Möglichkeiten, die man erhält, wenn man die Konsequenzen einer negativen Zusatzhypothese prüft.

Wenn man also den jugendlichen Köpfen die philosophische Einsicht in die Fortschritte eröffnen will, die aus der modernen Kritik hervorgehen, so muß man durchaus anders verfahren, als mühsame Beweise für Dinge, die an und für sich klar sind, in die Schule zu tragen, Beweise, die niemals ausreichen würden, eine Vorstellung von einer möglichen allgemeineren Geometrie entstehen zu lassen.

Dieser philosophische Unterricht muß, wenn man daran festhält, daß mindestens die befähigteren Schüler davon Vorteil ziehen können, Gegenstand von irgend welcher beigefügter Überlegung über die Natur der Erfahrungen sein, welche die Postulate rechtfertigen; so kann man ersehen lassen, daß das Parallelenaxiom nicht direkt in einem endlichen Gebiete des Raumes, der unseren Beobachtungsmitteln zugänglich ist, verifiziert werden kann, und daß manche mit ihm gleichwertige Sätze, welche diesen Übelstand vermeiden (z. B. die Summe der Winkel eines Dreiecks ist gleich zwei Rechten), dazu führen, es ersichtlich annähernd quantitativ als richtig nachzuweisen.

Mit diesen Bemerkungen kommen wir dazu, einen der empfindlichsten Punkte des Unterrichts zu berühren, in dem die elementare Unterweisung über die Grenzen der Elemente hinausgeht nach den hohen Regionen der wissenschaftlichen Philosophie hin. Es ist nicht möglich, a priori anzugeben, ob und unter welchen Bedingungen es für den Lehrer angebracht ist, in seinen Betrachtungen die bestimmten durch den Grad der Schule ihm auferlegten Grenzen zu überschreiten, um den jugendlichen Geistern einen Ausblick mit weiterem Gesichtskreis zu eröffnen. Sicher ist, daß Gelegenheiten dieser Art sich zuweilen bieten und daß für befähigte Schüler ein mäßiger Hinweis auf höhere Dinge ein Antrieb werden kann, die eigene Bildung zu vertiefen. Wer hat nicht in den eigenen Erinnerungen aus der Jugend irgend einen starken Eindruck, der, durch wenige eingestreute Worte des Lehrers hervorgerufen, der Anfang einer ganzen Reihe von Gedanken wurde.

Aber wehe, wenn man in solchen Fällen des Sinnes für Maßhalten ermangelt. Wehe, wenn das Überschreiten des elementaren Gebiets zum System gemacht wird, vor allem wo der Lehrer dem Wunsch nachgibt, einem mühelosen Unterricht eine zu große Ausdehnung zu geben.

In ganz anderer Weise muß sich der höhere Standpunkt des Lehrers zeigen. Er vergesse nicht, daß es nichts wert ist, mehr von dem zu wissen, was man lehrt, wenn dies nicht für dieselben Dinge, die gelehrt werden, ein besseres Verständnis schafft.

Eine derartige Tatsache zu beachten, kann so einfach und so offenbar scheinen, daß es unnütz ist, darauf nachdrücklich hinzuweisen. In der Tat ist es aber nicht so leicht, zu erfassen, was das bedeutet „besseres Verständnis“ der elementaren Dinge, und nach wieviel Richtungen dies bessere Verständnis für einen Lehrer gefordert werden kann.

Wir berühren hier eine Frage von grundlegender Bedeutung: die Vorbildung der Lehrer selbst. Aber dies umfangreiche Thema würde über die Grenzen, die unserer Schrift gezogen sind, hinausgehen.

Indes wollen wir nicht Halt machen, ohne mit einer Empfehlung zu schließen.

Ein umfassendes und höheres Verständnis des Stoffes, eine philosophische Ausbildung, die den Geist für wechselseitige Beziehungen entwickelt, verleihen einem jeden einfacheren Unterricht, in dem der Lehrer es versteht, ein Licht von der Flamme leuchten zu lassen, die er in seinem Denken angezündet hat, großen Wert und große Wirksamkeit. Es fördere also sich selbst, wer es wirklich erreichen will, andere zu fördern; diesen Rat kann man also darin zusammenfassen: Man pflege den eigenen Zweig der Studien als einen Bruchteil der allgemeinen Wissenschaft.
